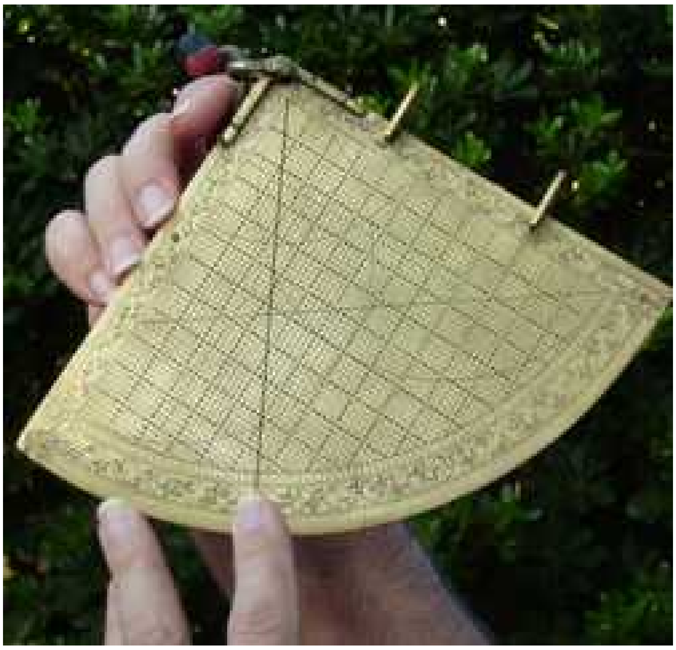
Quadrant des sinus et déclinaison du Soleil



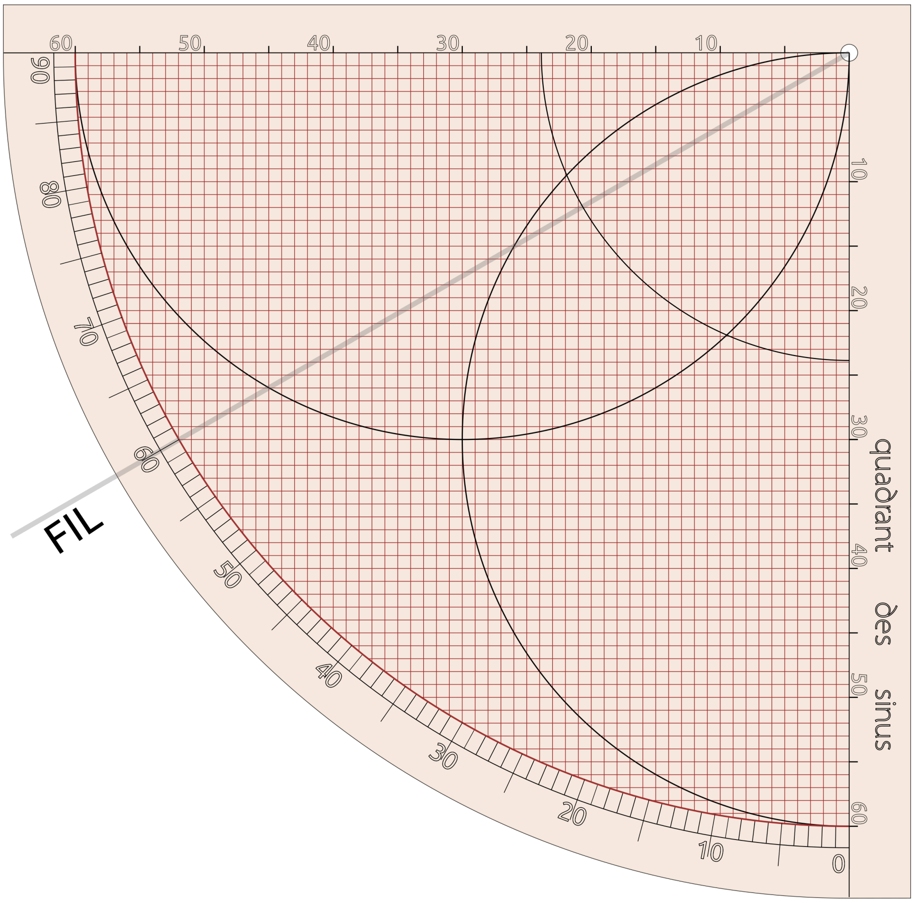
Résumé

Cet article explique comment le quadrant des sinus, un instrument mathématique ancien, permet de déterminer la valeur de la déclinaison du Soleil, à une date choisie.

1. **Principe de la lecture des *sinus* et *cosinus* d'un angle**
2. **Angles astronomiques : longitude écliptique, obliquité, et déclinaison**
3. **Détermination de la déclinaison du Soleil grâce au quadrant des sinus.**

1. **Principe de la lecture des *sinus* et *cosinus* d'un angle**

   Le quadrant porte deux séries de graduations sur les bords droits, allant de 0 à 60.
   Le bord courbé est l'arc des angles, en degrés.
   Le quadrillage est parcouru de deux demi-cercles et d'un petit quart-de-cercle. Un fil fixé au coin de l'instrument sert de repère mobile.

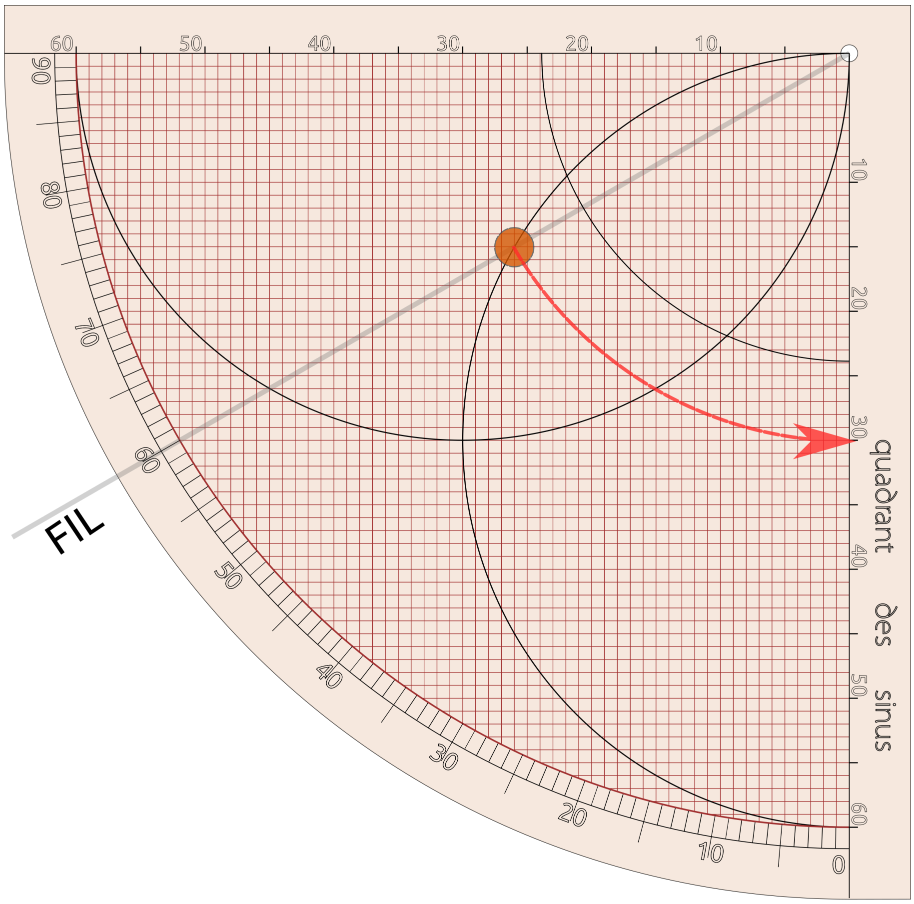


   Si l'on souhaite connaître la valeur de $sin(60°)$:

   - on tend le fil sur la graduation « 60 »
   - on repère le point où le fil coupe l'arc externe des angles
   - on suit le quadrillage *horizontalement* jusqu'à la graduation : on lit « 30 », c'est-à-dire $\frac{30}{60}$, soit 0,5
   - pour le cosinus, on suit le quadrillage *verticalement* jusqu'à l'autre graduation, ce qui donne $\frac{52}{60}$, une bonne valeur approchée de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, avec un rapport de 0,9993.

Utilisation des demi-cercles :

Les deux demi-cercles ont pour but de fournir une lecture alternative à la méthode précédente, mais avec la même finalité : la détermination des valeurs de cos et sin d'un angle.



On suppose que le fil est muni d'une perle mobile. Après avoir tendu le fil sur l'angle souhaité, on fait glisser la perle jusqu'à l'intersection du fil avec le demi-cercle de droite. Ensuite, on déplace le fil jusqu'à la graduation correspondant à ce demi-cercle : la perle indique alors la valeur du *sinus* de l'angle.
Pour le *cosinus*, on procède de la même manière mais avec l'autre demi-cercle et l'autre graduation.

On voit donc que les deux lignes de graduations peuvent échanger leur rôle, selon la méthode utilisée. L'utilisateur a plutôt intérêt à choisir l'une des méthodes une fois pour toutes, ou à avoir assez d'aisance en trigonométrie pour savoir à peu près à quel résultat s'attendre, sous peine de confondre les *sinus* et *cosinus*.

Pourquoi les graduations rectilignes ont-elles pour valeur limite « 60 » ?

Comme on l'a vu, cette valeur sert de dénominateur pour la fraction lue. On peut supposer que la base 60 est un choix judicieux parce que 60 possède de nombreux diviseurs. Mais une autre base ferait aussi bien l'affaire. De nos jours, un dénominateur 100 nous paraîtrait probablement plus familier, et fonctionnerait tout autant.

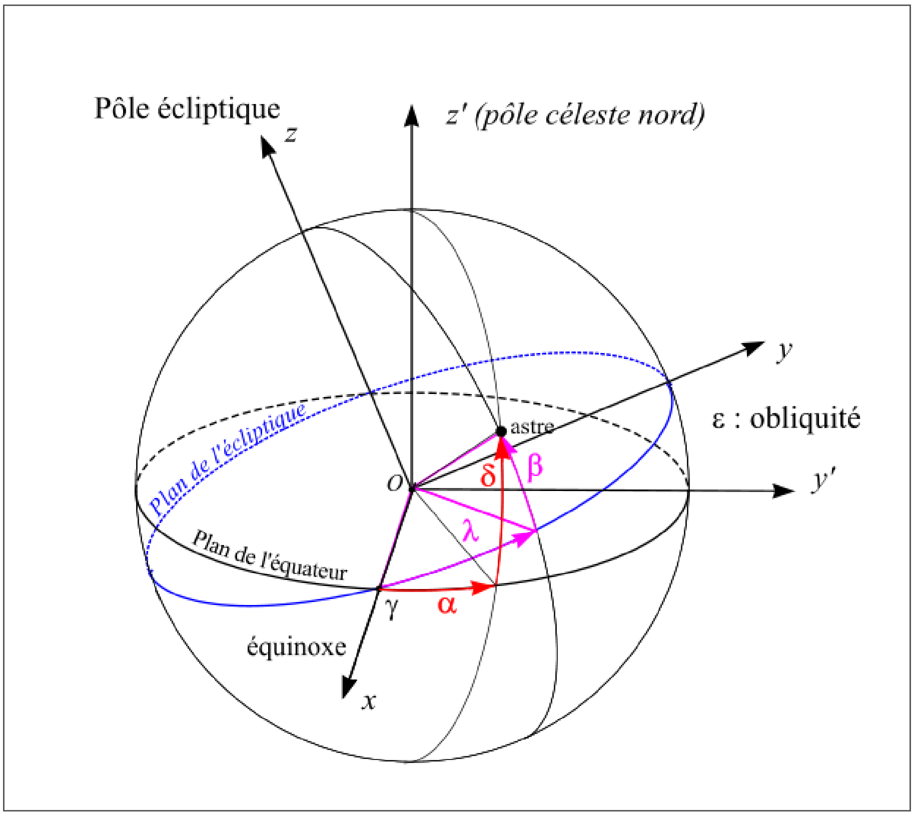
A quoi sert le petit quart-de-cercle visible sur de nombreux quadrants des sinus ?

Ce quart-de-cercle, centré au coin de l'instrument, a pour rayon 24 environ. La référence [1] donne une utilisation de cette ligne à des fins astronomiques, et nomme ce quart-de-cercle « *obliquity arc* », autrement dit la valeur « 24 » serait liée à l'obliquité de l'écliptique, angle que forme le plan de l'équateur avec le plan de l'écliptique. La valeur actuelle est d'environ 23,4°. L'ajout de ce quart-de-cercle sur la grille du quadrant des sinus fournit à cet instrument une fonctionnalité très intéressante pour l'astronome : la détermination de la déclinaison du Soleil, à une date donnée.

2. **Angles astronomiques : longitude écliptique, obliquité et déclinaison**

Le plan de l'écliptique, que parcourt le Soleil durant l'année, est incliné de 23,4 ° par rapport au plan de l'équateur.

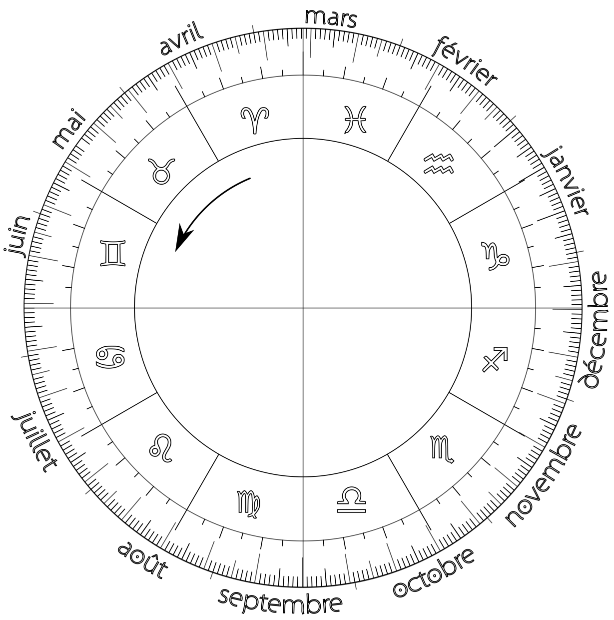
Ces plans donnent chacun lieu à un système de repérage de la position du Soleil au cours de l'année [2]:



On note λ la **longitude écliptique** du Soleil, comptée dans le plan de l'écliptique. Cet angle a pour origine le point vernal (noté γ). Par définition, c'est à l'équinoxe d'automne que le Soleil passe par le point vernal ($\gamma = 0°$).

On définit également la **déclinaison du Soleil**, notée δ, comme l'angle entre le Soleil et l'équateur, cet angle étant pris dans un plan passant par le pôle céleste nord.
Étant donné que le Soleil oscille de part et d'autre du plan de l'équateur au cours de l'année, la déclinaison est tantôt positive, tantôt négative, ses valeurs extrêmes étant $+\,\varepsilon$ et $-\,\varepsilon$. L'obliquité de l'écliptique ε vaut environ $23,4$ °.

Le calendrier zodiacal qui figure dans nombre d'instruments astronomiques anciens, décomposait l'année en 12 mois de 30 jours, soit une année de 360 jours. Un découpage sans correspondance avec les 365 jours de notre année civile, mais bien commode pour relier la date à la longitude écliptique :



$\lambda = 0°$ correspond au premier jour du Bélier (♈) - 21 mars
$\lambda = 30°$ correspond au premier jour du Taureau (♉) - 21 avril
$\lambda = 60°$ correspond au premier jour du Cancer (♋)- 21 juin
etc. à raison d'un degré par jour

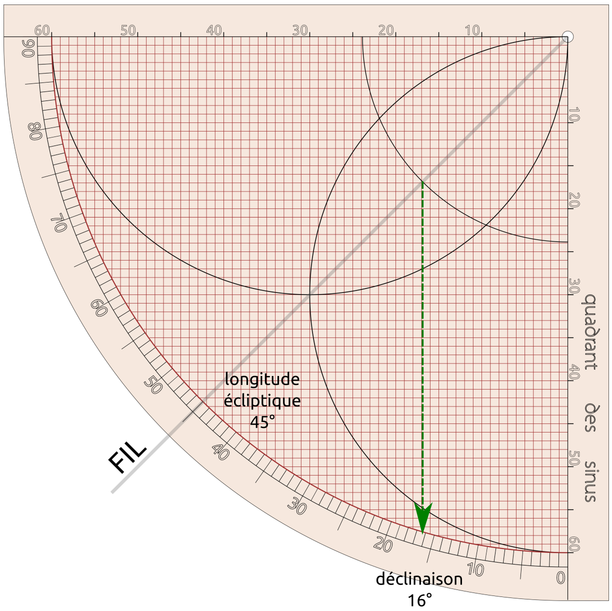
Cconnaître la valeur de la déclinaison du Soleil s'avère très utile en astronomie :

- elle permet par exemple de déterminer la hauteur méridienne, c'est-à-dire la hauteur du Soleil lorsqu'il culminue, à midi.
- la déclinaison permet aussi de calculer l'azimut du Soleil, ainsi que son angle horaire, au moment de son lever ou de son coucher.

Mais comme la déclinaison varie de jour en jour, il serait pratique d'avoir une méthode pour la déterminer sans transporter sur soi un tableau de 360 ou 365 valeurs – quitte à faire passer la précision après la « portabilité » des données. C'est ce que permet le quadrant des sinus et son arc d'obliquité.

3. **Détermination de la déclinaison du Soleil grâce au quadrant des sinus**

Supposons que l'on se trouve le 4 mai, c'est-à-dire le 15^e^ jour du Taureau. La longitude écliptique vaut alors $\lambda = 45°$ (30° pour le mois du Bélier + 15° pour le Taureau)



Voici la procédure pour déterminer la déclinaison du jour :

- on place le fil du quadrant sur l'angle de longitude 45°
- on repère l'intersection du fil avec l'arc d'obliquité
- on suit la grille verticalement jusqu'à l'arc externe de la grille : on lit alors la déclinaison du Soleil (dans cet exemple, entre 16 et 16,5°).

Pour expliquer pourquoi cette procédure fonctionne, il faut tout d'abord faire appel à la relation entre les angles astronomiques définis plus haut :

$$sin(\delta) \;=\; sin(\lambda) \times sin(\varepsilon)$$

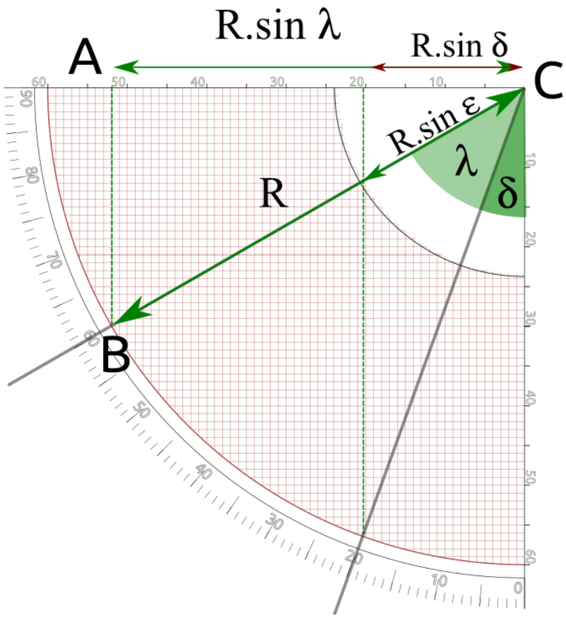
Il semble donc que l'instrument réalise une multiplication par $sin(\varepsilon)$ pour passer de la longitude à la déclinaison.

En effet, le petit quart-de-cercle a pour rayon $R.sin(\varepsilon)$, R étant le rayon de l'arc externe de l'instrument (ici, $R = 60$).

$$R.sin(\varepsilon) \;=\; 60.sin(23,4) \;\simeq 23,8$$

arrondi à 24 sur l'instrument.

Ensuite, il faut remarquer deux triangles homothétiques qui apparaissent lors de la lecture de l'angle sur le quadrant :



$$\frac{R.sin(\delta)}{R.sin(\lambda)} \; = \; \frac{R.sin(\varepsilon)}{R}$$

soit :

$$sin(\delta) \; = \; sin(\lambda) \times sin(\varepsilon)$$

on retrouve bien la relation précédente entre les angles astronomiques.

On peut tester la fiabilité de la méthode, avec l'exemple numérique pris ci-dessus :

avec $\lambda \; = \; 45$ °, on a : $\quad \delta \; = \; arcsin[sin(45) \times sin(\varepsilon)] \; \simeq 16,3$

Les valeurs de déclinaison indiquées par le quadrant ne diffèrent pas de plus de 0,5° de la valeur calculée.

Qu'en est-il pour les dates où la déclinaison est supérieure à 90° ?
Une fois atteinte la valeur 90° de longitude écliptique (c'est-à-dire au-delà du 21 juin), il faut redescendre l'échelle des angles :
Par exemple, pour la date du 1er juillet (ou 10e jour du Cancer), $\lambda \; = \; 100$ °. On place le fil sur l'angle 80° (car depuis 90°, on redescend de 10°). La valeur de la déclinaison obtenue sera la même que pour la date de longitude 80°.

Enfin, au-delà de l'équinoxe d'automne (23 septembre, ou 1er jour de la Balance ♎), les valeurs de longitude augmentent à nouveau, mais il faut se souvenir qu'en réalité elles sont négatives, et qu'il en va de même pour la déclinaison obtenue.
Sur le quadrant des sinus moderne, visible ci-dessous, les mois zodiacaux ont été placés afin de faciliter ce décompte.

Ainsi, en parcourant quatre fois ce quadrant, on aura décrit une année de course du Soleil autour de la Terre. Après cela, comment ne pas avoir le sentiment, en manipulant quadrants, astrolabes et autres sapheas, de tenir l'univers dans le creux de la main ?

Références :

[1] http://astrolabeproject.com/downloads/quadrants/SineQuadrantHandoutVersion1.pdf

[2] https://media4.obspm.fr/public/ressources_lu/pages_defrepere/changement-repere.html

[3] *Les instruments de l'astronomie ancienne*, Ph. Dutarte. Ed. Vuibert.